Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

**Отчёт по лабораторной работе 3**

**Дисциплина**: Вычислительная математика

Вариант 1

Выполнил студент гр. 3530901/90003 В.С. Андрианов

(подпись)

Преподаватель В.Н. Цыган

(подпись)

“ ” 2021 г.

Санкт-Петербург

2021

**Содержание**

1. **Техническое задание**
2. **Цель работы**
3. **Ход выполнения работы**
   1. **Используемая среда разработки и язык программирования**
   2. **Объяснение подхода к решению поставленной задачи**
   3. **Описание входных и выходных данных для работы исследуемых процедур**
   4. **Листинг программы**
   5. **Результат выполнения программы**
4. **Вывод**

**1. Техническое задание**

Привести дифференциальное уравнение: к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Начальные условия:

Точное решение:

Решить на интервале 1≤t ≤2

1. используя программу RKF45 с шагом печати = 0.1 и выбранной

погрешностью EPS в диапазоне 0.001 – 0.00001;

1. Используя метод Рунге-Кутты 3-й степени точности с шагом

интегрирования = 0.1

Исследовать влияние величины шага интегрирования на величины локальной и глобальной погрешностей решения заданного уравнения, для этого взять шаг вычисления

**2. Цель работы**

Использовать в рабочих целях реализацию базовых подпрограмм, таких как RKF45, а также рассмотреть метод Рунге-Кутты третьего порядка.

**3. Ход выполнения работы**

**3.1 Используемая среда разработки и язык программирования**

Для решения поставленной задачи в качестве языка программирования был выбран язык С++. Разработка велась в Clion (среда разработки).

**3.2 Объяснение подхода к решению поставленной задачи**

Метод Рунге-Кутты 3ей степени точности:

Приведение дифференциального уравнения: к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка**:**

Пусть , тогда . После замены получим:

После получения системы двух дифференциальных уравнений первого порядка необходимо составить процедуру, которая рассчитывает значения . Составленной процедурой является процедура fun(t, y, dy). Процедура fun получает на вход значение интервала t, значение y и дифференциала dy.

С помощью полученной процедуры fun(), можно использовать подпрограмму RKF45(fun, n, x, T, TOUT, RE, AE, IFLAG, WORK, IWORK). Для получения всех значений на промежутке [1, 2] с шагом интегрирования h = 0.1 и погрешностью 1e-4 была составлена процедура rkf45(y, dy, y0, dy0, h), которая на вход принимает два массива y и dy, в которые будут записаны результаты, значения y0, dy0 и шаг интегрирования h.

Для вычисления методом Рунге-Кутты 3ей степени точности была составлена процедура RungeKutta3(t, Xn, Xnp0, Xnp1, h, i). На вход процедура RungeKutta3() получает: точку вычисления t, вектор значений Xn в начале промежутка, два массива Xnp0 и Xnp1, в которые будут записаны результаты работы, шаг интегрирования h и номер точки вычисления i. Для вычисления всех точек промежутка была составлена процедура RungeKutta(Xn, Xnp0, Xnp1, h), которая на вход получает вектор значений Xn в начале промежутка, два массива Xnp0 и Xnp1, в которые будут записаны результаты работы, шаг интегрирования h.

Для вычисления глобальной погрешности результатов были составлены несколько процедур. Процедура funSolver(y, dy, h) получает на вход массивы y и dy (в них будет записан результат) и шаг вычисления h. Процедура funSolver() вычисляет точное значение системы. Процедура globalErrorRKF(Y0rkf, Y1rkf, F0, F1) получает на вход результаты работы процедур rkf45() и funSolver(), и вычисляет глобальную погрешность результатов процедуры rkf45(). Процедура globalErrorRungeKutta(Y0rkf, Y1rkf, F0, F1) получает на вход результаты работы процедур RungeKutta() и funSolver(), и вычисляет глобальную погрешность результатов процедуры RungeKutta().

Для вычисления локальной погрешности результатов были составлены процедуры localErrorRKF() и localErrorRungeKutta(). Процедура localErrorRKF(Y0rkf, Y1rkf, F0, F1, localError0, localError1, h) получает на вход результаты работы процедур rkf45() и funSolver(), рабочие массивы localError0 и localError1 и шаг интегрирования h. localErrorRKF() вычисляет погрешность каждого шага, учитывая локальные погрешности предыдущих шагов. Процедура localErrorRungeKutta(Xnp0, Xnp1, F0, F1, localError0, localError1, h) получает на вход результаты работы процедур RungeKutta() и funSolver(), рабочие массивы localError0 и localError1 и шаг интегрирования h. localErrorRungeKutta() вычисляет погрешность каждого шага, учитывая локальные погрешности предыдущих шагов.

**3.3 Описание входных и выходных данных для работы исследуемых процедур**

**RKF45 (F, N, X, T, TOUT, RE, AE, IFLAG, WORK, IWORK)**

**F** – имя процедуры, написанной пользователем для вычисления правых частей системы

**N** – количество интегрируемых уравнений

**X** – вектор решения размерностью **N** в точке **Т** на входе в программу и в точке **TOUT** при выходе из нее

**Т** – начальное значение независимой переменной на входе в программу (при нормальном выходе TOUT)

**TOUT** – точка выхода по независимой переменной

**RE** – границы относительной погрешности

**АE** – границы абсолютной погрешности

**WORK** – рабочий вещественный массив размерности 6N + 3

**IWORK** – рабочий целый массив размерности не менее 5

**IFLAG** – указатель режима интегрирования.

При первом обращении на входе **IFLAG = 1**, а при последующих обращениях на входе **IFLAG = 2**. Нормальное выходное значение **IFLAG = 2**. Другие выходные значения указывают на возникшие отклонения от нормального процесса интегрирования:

**IFLAG = 3** – заданное значение RE оказалось слишком малым и требуется его увеличить;

**IFLAG = 4** – потребовалось более 3000 вычислений f(t, x)

**IFLAG = 5** – решение обратилось в нуль, а АЕ равно нулю. Требуется задать ненулевое значение АЕ

**IFLAG = 6** – требуемая точность не достигнута даже при наименьшей допустимой величине шага и требуется увеличить АЕ и RE

**IFLAG = 7** – слишком большое число требуемых выходных точек препятствует выбору естественной величины шага. Нужно или увеличить TOUT–T или задать значение IFLAG=2 и продолжить работу программы

**IFLAG = 8** – неправильное задание параметров процедуры (например**, N < 0, AE < 0, RE < 0**).

**3.4 Листинг программы**

// количество вычислений  
int n = 11;  
  
// система первого порядка  
void fun(double t, double \*y, double \*dy) {  
 dy[0] = y[1];  
 dy[1] = ((t + 1) \* y[1] + 2 \* (t - 1) \* y[0]) / t;  
}  
  
// вычисление точного значения системы  
void funSolver(double \*y, double \*dy, double h) {  
 double T = 1.0;  
 printf("\nfun solutions");  
 for (int i = 0; i < n; ++i) {  
 y[i] = exp(2 \* T);  
 dy[i] = 2 \* exp(2 \* T);  
 if (i % 1 == 0) printf("\nY0[0] = %.15lf Y0[1] = %.15lf", y[i], dy[i]);  
 T += h;  
 }  
}  
  
// применение процедуры rkf45 на всех точка в промежутке [1, 2]  
void rkf45(double \*y, double \*dy, double y0, double dy0, double h) {  
 double Y0[] = { y0, dy0 };  
 double T = 1.0, TOUT = 1.0;  
 int iflag = 1;  
 int iwork[30];  
 double work[15];  
 double RE = 1e-3, AE = 1e-3;  
 printf("RKF45");  
 for (int i = 0; i < n; ++i) {  
 RKF45(fun, 2, Y0, &T, &TOUT, &RE, &AE, &iflag, work, iwork);  
 if (i % 1 == 0) printf("\nY[0] = %.15lf Y0[1] = %.15lf iflag = %d", Y0[0], Y0[1], iflag);  
 y[i] = Y0[0];  
 dy[i] = Y0[1];  
 TOUT += h;  
 }  
}  
  
// применение метода Рунге-Кутты 3ей степени точности  
void RungeKutta3(double t, double \*Xn, double \*Xnp0, double \*Xnp1, double h, int i) {  
  
 double k[2], k2[2], k1[2], k3[2];  
  
 fun(t, Xn, k1);  
  
 k1[0] = h \* k1[0];  
 k1[1] = h \* k1[1];  
  
 k[0] = Xn[0] + k1[0] / 2;  
 k[1] = Xn[1] + k1[1] / 2;  
  
 fun(t + h / 2, k, k2);  
  
 k2[0] = h \* k2[0];  
 k2[1] = h \* k2[1];  
  
 k[0] = Xn[0] + 3 \* k2[0] / 4;  
 k[1] = Xn[1] + 3 \* k2[1] / 4;  
  
 fun(t + 3 \* h / 4, k, k3);  
  
 k3[0] = h \* k3[0];  
 k3[1] = h \* k3[1];  
  
 Xnp0[i] = Xn[0] + (2 \* k1[0] + 3 \* k2[0] + 4 \* k3[0]) / 9;  
 Xnp1[i] = Xn[1] + (2 \* k1[1] + 3 \* k2[1] + 4 \* k3[1]) / 9;  
}  
  
// применение метода Рунге-Кутты 3ей степени точности на всех точка в промежутке [1, 2]  
void RungeKutta(double \*Xn, double \*Xnp0, double \*Xnp1, double h) {  
 double T = 1.0;  
 printf("\nRungeKutta3\n");  
 for (int i = 1; i < 12; ++i) {  
 RungeKutta3(T, Xn, Xnp0, Xnp1, h, i);  
 if ((i - 1) % 1 == 0) printf("Y[0] = %.15lf Y0[1] = %.15lf\n", Xn[0], Xn[1]);  
 Xn[0] = Xnp0[i];  
 Xn[1] = Xnp1[i];  
 T += h;  
 }  
}  
  
// вычисление глобальной погрешности работы процедуры rkf45  
void globalErrorRKF(double \*Y0rkf, double \*Y1rkf, double \*F0, double \*F1) {  
 printf("\nRKF45 GLOBAL ERROR:\n");  
 for (int i = 0; i < n; ++i) {  
 if (i % 1 == 0) printf("Y0rkf = %.15lf Y1rkf = %.15lf\n", abs(Y0rkf[i] - F0[i]), abs(Y1rkf[i] - F1[i]));  
 }  
}  
  
// вычисление глобальной погрешности работы процедуры RungeKutta  
void globalErrorRungeKutta(double \*Y0rk3, double \*Y1rk3, double \*F0, double \*F1) {  
 printf("\nRunge Kutta 3 GLOBAL ERROR:\n");  
 for (int i = 0; i < n; ++i) {  
 if (i % 1 == 0) printf("Y0rk3 = %.15lf Y1rk3 = %.15lf\n", abs(Y0rk3[i] - F0[i]), abs(Y1rk3[i] - F1[i]));  
 }  
}  
  
// вычисление локальной погрешности RKF45  
void localErrorRKF(double \*Y0rkf, double \*Y1rkf,  
 double \*F0, double \*F1,  
 double \*localError0, double \*localError1,  
 double h) {  
 double TOUT = 1.0;  
 printf("\nRKF45 LOCAL ERROR: h = %.4lf\n", h);  
 for (int i = 0; i < n; i++) {  
 localError0[i] = abs(Y0rkf[i] - F0[i]);  
 localError1[i] = abs(Y1rkf[i] - F1[i]);  
 for (int j = i - 1; j > -1; --j) {  
 if (i == 0) continue;  
 localError0[i] -= localError0[j];  
 localError1[i] -= localError1[j];  
 }  
 }  
 for (int i = 0; i < n; ++i) {  
 if (i % 1 == 0) {  
 printf("Tout = %lf ", TOUT);  
 printf("Local Error: RKF45[0] = %.15lf RKF45[1] = %.15lf\n", localError0[i], localError1[i]);  
 TOUT += h;  
 }  
 }  
}  
  
// вычисление локальной погрешности Runge Kutta 3  
void localErrorRungeKutta(double \*Xnp0, double \*Xnp1,  
 double \*F0, double \*F1,  
 double \*localError0, double \*localError1,  
 double h) {  
 double TOUT = 1.0;  
 printf("\nRunge Kutta 3 LOCAL ERROR: h = %.4lf\n", h);  
 for (int i = 0; i < n; i++) {  
 localError0[i] = abs(Xnp0[i] - F0[i]);  
 localError1[i] = abs(Xnp1[i] - F1[i]);  
 for (int j = i - 1; j > -1; --j) {  
 if (i == 0) continue;  
 localError0[i] -= localError0[j];  
 localError1[i] -= localError1[j];  
 }  
 }  
 for (int i = 0; i < n; ++i) {  
 if (i % 1 == 0) {  
 printf("Tout = %lf ", TOUT);  
 printf("Local Error: RungeKutta3[0] = %.15lf RungeKutta3[1] = %.15lf\n", localError0[i],  
 localError1[i]);  
 TOUT += h;  
 }  
 }  
}  
  
int main() {  
  
 double h = 0.1;  
  
 double Y0rkf[81], Y1rkf[81], localErrorRKF0[81], localErrorRKF1[81];  
 double Y0[2] = { exp(2), 2 \* exp(2) };  
 rkf45(Y0rkf, Y1rkf, Y0[0], Y0[1], h);  
  
 double Xn1[]= { exp(2), 2 \* exp(2) }, Xnp0[84] = { exp(2) }, Xnp1[84] { 2 \* exp(2) };  
 double localErrorRK0[81], localErrorRK1[81];  
 RungeKutta(Xn1, Xnp0, Xnp1, h);  
  
 double F0[82], F1[82];  
 funSolver(F0, F1, h);  
  
 localErrorRKF(Y0rkf, Y1rkf, F0, F1, localErrorRKF0, localErrorRKF1, h);  
 localErrorRungeKutta(Xnp0, Xnp1, F0, F1, localErrorRK0, localErrorRK1, h);  
 globalErrorRKF(Y0rkf, Y1rkf, F0, F1);  
 globalErrorRungeKutta(Xnp0, Xnp1, F0, F1);  
  
 return 0;  
}

**3.5 Результат выполнения программы**

RKF45 – результат работы процедуры rkf45

RungeKutta3 – результат работы процедуры RungeKutta

Fun solutions – точное значение системы

RKF45 Local Error – локальная погрешность результатов процедуры rkf45

RungeKutta Local Error – локальная погрешность результатов процедуры RungeKutta

RKF45 Local Error – глобальная погрешность результатов процедуры rkf45

RungeKutta Local Error – глобальная погрешность результатов процедуры RungeKutta

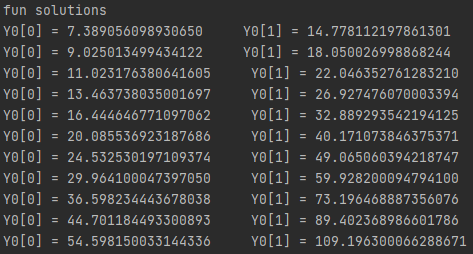


Рис. 1 Точное значение функции с шагом печати

Шаг интегрирования h = 0.1

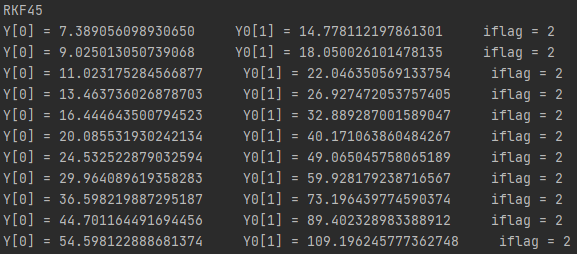


Рис. 2 RKF45

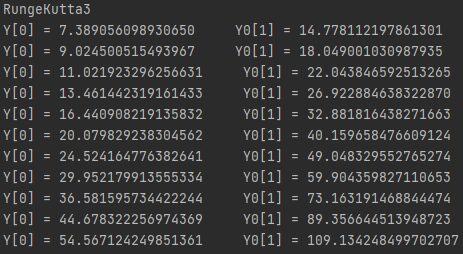


Рис. 3 RungeKutta3

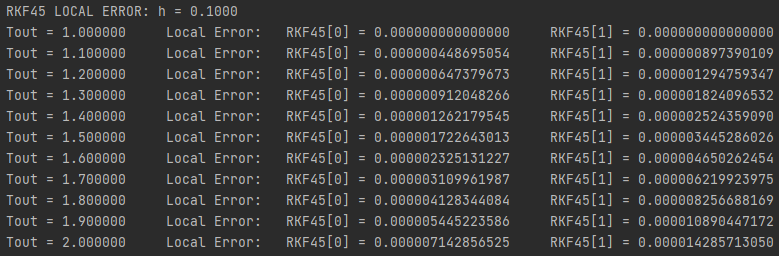


Рис. 4 Локальная погрешность RKF45



Рис. 5 Локальная погрешность одного шага RKF45

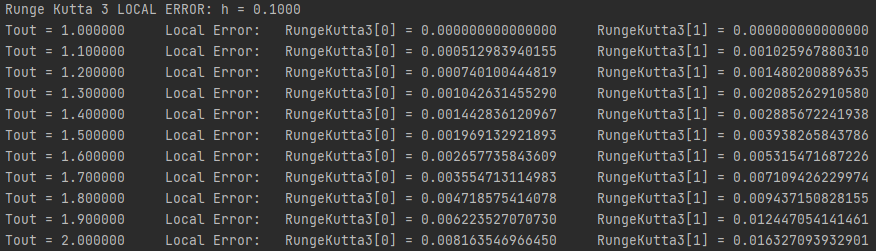


Рис. 6 Локальная погрешность Runge Kutta 3



Рис. 7 Локальная погрешность одного шага Runge Kutta 3

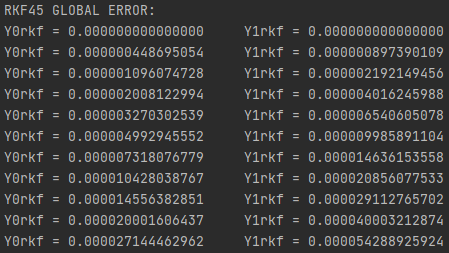


Рис. 8 Глобальная погрешность RKF45

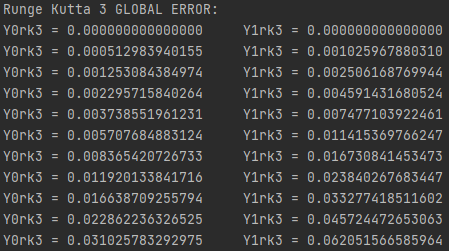


Рис. 9 Глобальная погрешность Runge Kutta 3

Шаг интегрирования h = 0.05

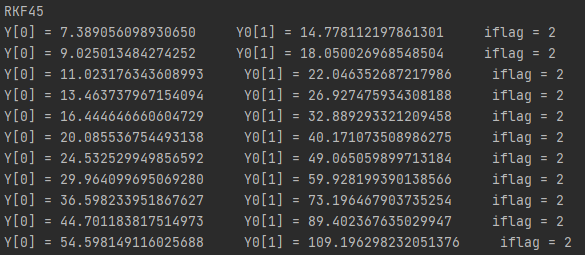


Рис. 10 RKF45, = 0.05,

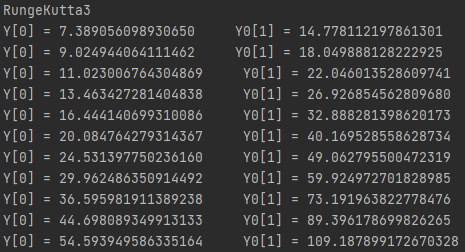


Рис. 11 Runge Kutta 3, = 0.05,

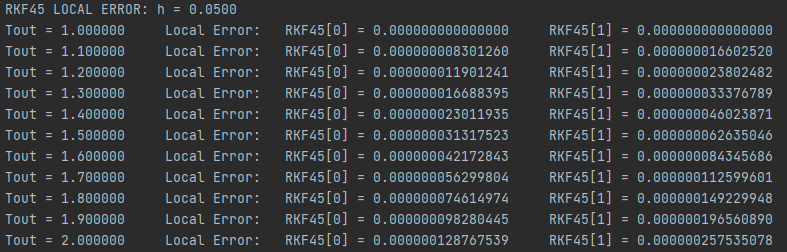


Рис. 12 Локальная погрешность RKF45,



Рис. 13 Локальная погрешность одного шага RKF45

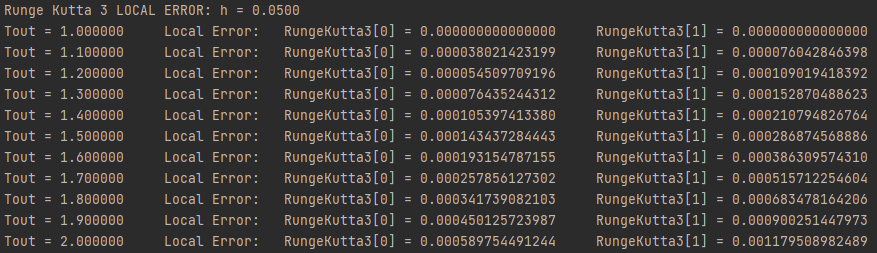


Рис. 14 Локальная погрешность Runge Kutta 3,



Рис. 15 Локальная погрешность одного шага Runge Kutta 3

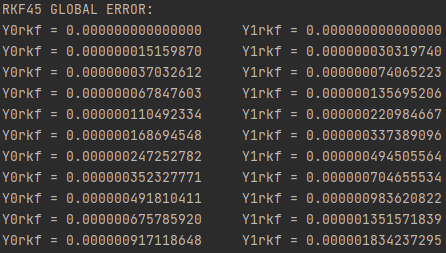


Рис. 16 Глобальная погрешность RKF45,

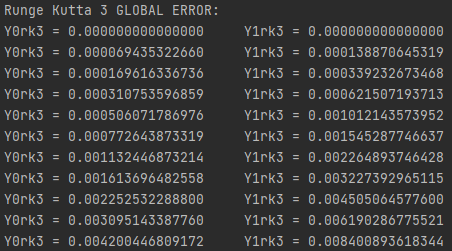


Рис. 17 Глобальная погрешность Runge Kutta 3,

Шаг интегрирования h = 0.025

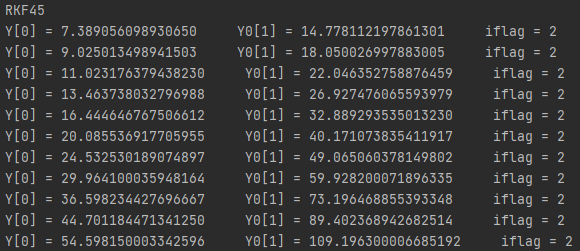


Рис. 18 RKF45, = 0.025,

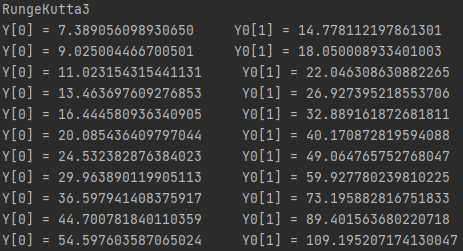


Рис. 19 Runge Kutta 3, = 0.025,

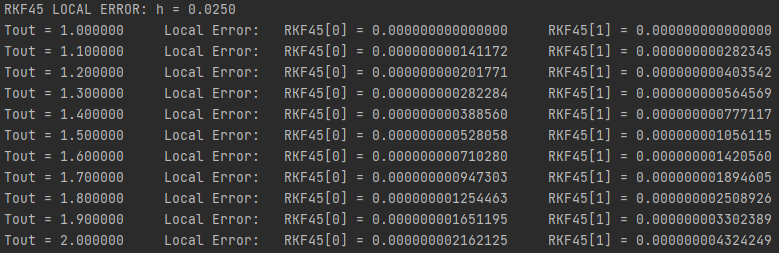


Рис. 20 Локальная погрешность RKF45,



Рис. 21 Локальная погрешность одного шага RKF45

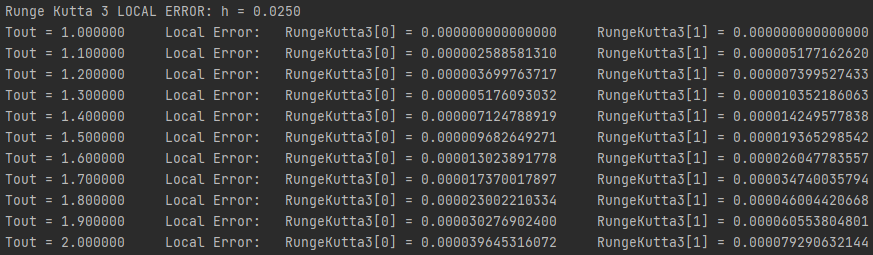


Рис. 22 Локальная погрешность Runge Kutta 3,



Рис. 23 Локальная погрешность одного шага Runge Kutta 3

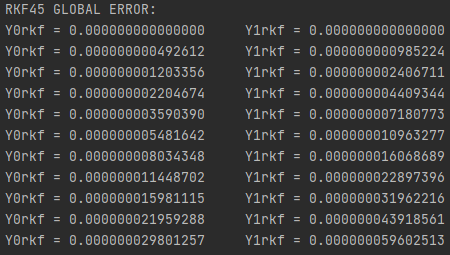


Рис. 24 Глобальная погрешность RKF45,

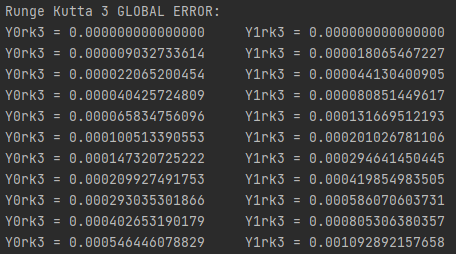


Рис. 25 Глобальная погрешность Runge Kutta 3,

Шаг интегрирования h = 0.0125

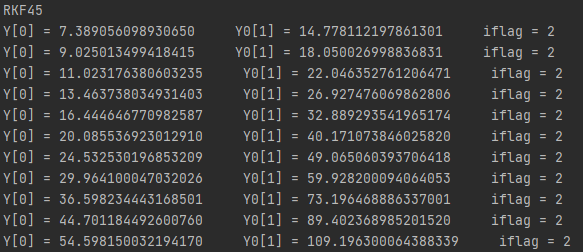


Рис. 26 RKF45, = 0.0125,

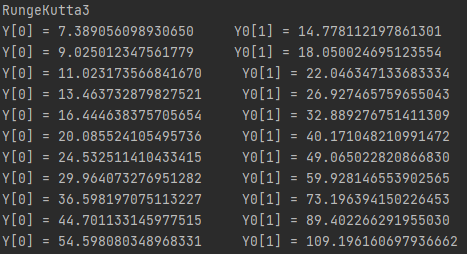


Рис. 27 Runge Kutta 3, = 0.0125,

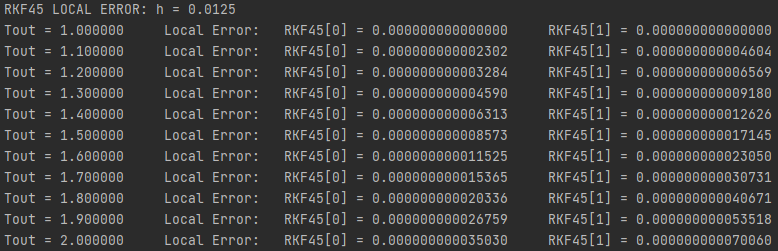


Рис. 28 Локальная погрешность RKF45,



Рис. 29 Локальная погрешность одного шага RKF45

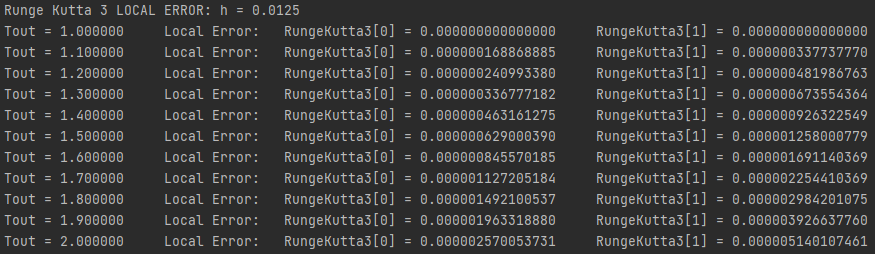


Рис. 30 Локальная погрешность Runge Kutta 3,



Рис. 31 Локальная погрешность одного шага Runge Kutta 3

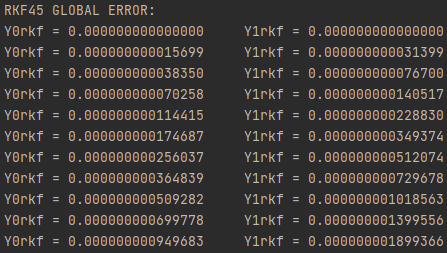


Рис. 32 Глобальная погрешность RKF45,

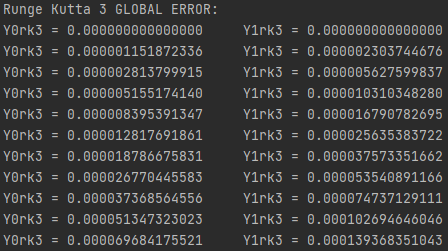


Рис. 33 Глобальная погрешность Runge Kutta 3,

Для исследования зависимости изменения локальной погрешности при изменении шага интегрирования, были построены таблицы. В таблице 1 представлены локальные погрешности первого шага (для для RKF45, в таблице 2 для Runge Kutta 3.

Табл. 1 – Исследование локальной погрешности RKF45

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| hi | RKF45 Local Error | | Difference, | |
| RKF45[0] | RKF45[1] | RKF45[0] | RKF45[1] |
| 0.1 | 0,000000448695054 | 0,000000897390109 | - | - |
| 0.05 | 0,00000000685861 | 0,000000013717219 | 65,42069807 | 65,42070291 |
| 0.025 | 0,000000000105999 | 0,000000000211998 | 64,70447834 | 64,70447363 |
| 0.0125 | 0,000000000001648 | 0,000000000003295 | 64,31978155 | 64,33930197 |

RKF45 – метод пятого порядка точности, поэтому величина локальной погрешности пропорциональна h6, то есть если шаг уменьшается в 2 раза, то локальная погрешность уменьшается в 26 = 64 раза. Из таблицы 1 следует, что при уменьшении шага интегрирования локальная погрешность становится примерно в 64 раза меньше.

Также стоит отметить, что если шаг интегрирования уменьшиться в 8 раз, то погрешность уменьшиться в 86 = 262144 раза. При шаге интегрирования hint = 0.1 локальная погрешность первого шага = 0,000000448695054 (для RKF45[0]), при hint = 0.0125 локальная погрешность первого шага = 0,000000000001648. Разделив погрешность шага 0.1 на погрешность шага 0.0125, получим: 272 266, примерно такой результат был ожидаем.

Табл. 2 – Исследование локальной погрешности Runge Kutta 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| hi | Runge Kutta 3 Local Error | | Difference, | |
| RungeKutta[0] | RungeKutta [1] | RungeKutta [0] | RungeKutta [1] |
| 0.1 | 0,000512983940155 | 0,00102596788031 | - | - |
| 0.05 | 0,00003141389946 | 0,000062827798921 | 16,32983962 | 16,32983962 |
| 0.025 | 0,000001943637197 | 0,000003887274394 | 16,16242965 | 16,16242965 |
| 0.0125 | 0,000000120868422 | 0,000000241736844 | 16,08060372 | 16,08060372 |

Runge Kutta 3 – метод третьего порядка точности, поэтому величина локальной погрешности пропорциональна h4, то есть если шаг уменьшается в 2 раза, то локальная погрешность уменьшается в 24 = 16 раз. Из таблицы 2 следует, что при уменьшении шага интегрирования локальная погрешность становится примерно в 16 раз меньше.

Если шаг интегрирования уменьшиться в 8 раз, то погрешность уменьшиться в 84 = 4096 раз. При шаге интегрирования hint = 0.1 локальная погрешность первого шага = 0,000512983940155 (для RungeKutta[1]), при hint = 0.0125 локальная погрешность первого шага = 0,000000120868422. Разделив погрешность шага 0.1 на погрешность шага 0.0125, получим: 4 244, примерно такой результат был ожидаем.

Для исследования зависимости глобальной погрешности от шага интегрирования, были построены таблицы 3 и 4. Все данные в таблицах (кроме погрешностей), для удобного представления, были округлены. Также таблицы представлены только для значений функций RKF45[0] и RungeKutta3[0], потому что поведение погрешностей у RKF45[1] и RungeKutta3[1] такое же.

Табл. 3 - Результаты изменения глобальной погрешности (RKF45[0])

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *h* | fun solution | Rkf45/0,1 | Difference | Rkf45/0,05 | Difference | Rkf45/0,025 | Difference | Rkf45/0,0125 | Difference |
| 1,0 | 7,389056099 | 7,389056099 | 0 | 7,389056 | 0 | 7,389056 | 0 | 7,389056099 | 0 |
| 1,1 | 9,025013051 | 9,025013051 | 4,48695E-07 | 9,025013 | 1,51599E-08 | 9,025013 | 4,92621E-10 | 9,025013499 | 1,57101E-11 |
| 1,2 | 11,02317528 | 11,02317528 | 1,09607E-06 | 11,02318 | 3,70327E-08 | 11,02318 | 1,2034E-09 | 11,02317638 | 3,83995E-11 |
| 1,3 | 13,46373603 | 13,46373603 | 2,00812E-06 | 13,46374 | 6,78476E-08 | 13,46374 | 2,2047E-09 | 13,46373803 | 7,01998E-11 |
| 1,4 | 16,4446435 | 16,4446435 | 3,2703E-06 | 16,44465 | 1,10492E-07 | 16,44465 | 3,5904E-09 | 16,44464677 | 1,14497E-10 |
| 1,5 | 20,08553193 | 20,08553193 | 4,99295E-06 | 20,08554 | 1,68695E-07 | 20,08554 | 5,4817E-09 | 20,08553692 | 1,74701E-10 |
| 1,6 | 24,53252288 | 24,53252288 | 7,31808E-06 | 24,53253 | 2,47253E-07 | 24,53253 | 8,0345E-09 | 24,5325302 | 2,56097E-10 |
| 1,7 | 29,96408962 | 29,96408962 | 1,0428E-05 | 29,9641 | 3,52328E-07 | 29,9641 | 1,14489E-08 | 29,96410005 | 3,64999E-10 |
| 1,8 | 36,59821989 | 36,59821989 | 1,45564E-05 | 36,59823 | 4,9181E-07 | 36,59823 | 1,59814E-08 | 36,59823444 | 5,09502E-10 |
| 1,9 | 44,70116449 | 44,70116449 | 2,00016E-05 | 44,70118 | 6,75786E-07 | 44,70118 | 2,19596E-08 | 44,70118449 | 7,00098E-10 |
| 2,0 | 54,59815003 | 54,598122889 | 2,71445E-05 | 54,59814912 | 9,17119E-07 | 54,598150 | 2,98018E-08 | 54,59815003 | 9,50202E-10 |

Табл. 4 - Результаты изменения глобальной погрешности (RungeKutta3[0])

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *h* | fun solution | RK3/0,1 | Difference | RK3/0,05 | Difference | RK3/0,025 | Difference | RK3/0,0125 | Difference |
| 1,0 | 7,3890561 | 7,38905610 | 0 | 7,38905610 | 0 | 7,38905610 | 0 | 7,389056099 | 0 |
| 1,1 | 9,0250131 | 9,02450052 | 0,000512984 | 9,02494406 | 6,94353E-05 | 9,02500447 | 9,03273E-06 | 9,025012348 | 1,15187E-06 |
| 1,2 | 11,023175 | 11,0219233 | 0,001253084 | 11,0230068 | 0,000169616 | 11,0231543 | 2,20652E-05 | 11,02317357 | 2,8138E-06 |
| 1,3 | 13,463736 | 13,4614423 | 0,002295716 | 13,4634273 | 0,000310754 | 13,4636976 | 4,04257E-05 | 13,46373288 | 5,15517E-06 |
| 1,4 | 16,4446435 | 16,4409082 | 0,003738552 | 16,4441407 | 0,000506072 | 16,4445809 | 6,58348E-05 | 16,44463838 | 8,39539E-06 |
| 1,5 | 20,085532 | 20,0798292 | 0,005707685 | 20,0847643 | 0,000772644 | 20,0854364 | 0,000100513 | 20,08552411 | 1,28177E-05 |
| 1,6 | 24,532523 | 24,5241648 | 0,008365421 | 24,5313978 | 0,001132447 | 24,5323829 | 0,000147321 | 24,53251141 | 1,87867E-05 |
| 1,7 | 29,964090 | 29,9521799 | 0,011920134 | 29,9624864 | 0,001613696 | 29,9638901 | 0,000209927 | 29,96407328 | 2,67704E-05 |
| 1,8 | 36,598220 | 36,5815957 | 0,016638709 | 36,5959819 | 0,002252532 | 36,5979414 | 0,000293035 | 36,59819708 | 3,73686E-05 |
| 1,9 | 44,7011650 | 44,6783223 | 0,022862236 | 44,6980894 | 0,003095143 | 44,7007818 | 0,000402653 | 44,70113315 | 5,13473E-05 |
| 2,0 | 54,598150 | 54,5671243 | 0,031025783 | 54,5939496 | 0,004200447 | 54,5976036 | 0,000546446 | 54,59808035 | 6,96842E-05 |

Из таблиц 3 и 4 видно, что при уменьшении шага интегрирования, величина погрешности на порядок меньше, чем на тех же точках у шага интегрирования, который в два раза больше.

Исходя из полученных результатов работы процедур и значений, полученных из точного решения, можно сказать о корректности данных, полученных после выполнения составленной программы.

Из результатов погрешностей можно отметить, что погрешность растет на каждом шаге, это происходить из-за влияния локальных погрешностей предыдущих шагов.

Также стоит отметить, что при уменьшении шага интегрирования растет количество вычислений, но сильно сокращается погрешность.

**4. Вывод**

В ходе выполнения работы было проведено исследование работы процедуры RKF45(), а также исследован метод Рунге-Кутты третьей степени точности.

С помощью процедур RKF45() и RungeKutta() были вычислены значение системы дифференциальных уравнений первого порядка на интервале [1, 2]. Также было вычислено реальное значение функции на интервале.

С помощью полученных данных, были найдены локальные и глобальные погрешности процедур RKF45() и RungeKutta(). Было проведено исследование влияния шага интегрирования на локальную и глобальную погрешности.

Из исследования влияния шага интегрирования на локальную погрешность, была получена пропорциональная зависимость локальной погрешности от шага интегрирования. Для процедуры RKF45() – это h6, а для процедуры RungeKutta() – это h4.

Из исследования влияния шага интегрирования на глобальную погрешность, можно сделать вывод, что при уменьшении шага интегрирования в два раза, погрешность уменьшается (в одних и тех же точках погрешность на порядок отличается), но при этом растет количество вычислений.